УДК 535.416.3

КОНСТРУИРОВАНИЕ БИОРТОГОНАЛЬНЫХ ВЕЙВЛЕТ-БАЗИСОВ ДЛЯ ОПТИМАЛЬНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СИГНАЛОВ

Ю.Н. Исаев

Томский политехнический университет
Институт оптического мониторинга СО РАН. г. Томск
E-mail: Isaev_Yusup@mail.ru

Подробно описывается алгоритм синтеза биортогональных условию кратномасштабного анализа. Приводятся примеры восстановления и сжатия сигналов на основе сконструированных вейвлетов. Описывается их сходство с базисом Карунена-Лоева.

Введение

Интенсивность и фаза оптического излучения, прошедшего атмосферу со случайными неоднородностями, используются для извлечения информации об атмосфере или передачи информации через неё. В результате взаимодействия с турбулентной средой распространения фаза и интенсивность волны становятся топологически сложными объектами. Происходит преобразование гладкого рельефа волнового фронта в прерывистую изломанную структуру со степенными особенностями и сингулярностями. Для удобства и упрощения анализа эти сложные математические объекты, условно будем называть их случайными оптическими сигналами, обычно представ-

ляются в виде сумм ортогональных составляющих бесчисленным количеством способов. И поскольку каждый раз система ортогональных функций, применяемая для разложения, бывает известна, то интенсивность или фаза оптической волны полностью определяются наборами весовых чисел для этих функций. Насколько адекватным реальности окажется восстановление сигнала, зависит от удачи выбора базиса. При решении задач восстановления поля волны возникает необходимость хранить большие массивы данных изображения, необходимость устранять шумы изображения, сократить время обработки данных и тем самым приблизиться к реальным временным масштабам физического процесса, отслеживать эволюцию частоты сигнала, вызванную различными временными и пространственными масштабами неоднородности.

В данной работе мы не будем рассматривать полиномиальные функции, гладкость которых заставляет их вести себя определённым образом, потому что сигналы с которыми приходится встречаться на практике хотя и непрерывные, но не дифференцируемые. Полиномиальные функции не достаточно гибки, что бы отслеживать скачки и степенные особенности натурных сигналов. Поэтому в данной работе мы будем рассматривать вейвлет-базисы, обладающие фрактальным свойством самоподобия и позволяющие отслеживать сингулярности и изломы исследуемого сигнала. Замечательное свойство самоподобия является причиной других полезных свойств, как то: свойство локальности, свойство быстрых преобразований, возможности высокой степени компрессии сигналов и изображений, возможность выделять сингулярные особенности и фрактальную структуру случайного сигнала, возможность разложения исследуемого сигнала по масштабам неоднородности.

Существует широкий класс вейвлет-базисов различной природы, однако, их математическое описание слабо освещено в отечественной литературе. Количество отечественной литературы по синтезу вейвлет преобразований не велико. Отметим некоторые из них. Полезной и интересной работой о возможностях приложения вейвлет преобразований является работа [1]. Наиболее информативными являются работы [2, 3] в которых приводятся классификация вейвлетов и все необходимые теоремы по синтезу вейвлет преобразований. Недавно появился перевод книг по конструкции вейвлетов [4] и [5]. И наконец самым мощным источником информации о вейвлетах остаётся Internet. На сайтах http://www/mathsoft/com/wavelet.html, http://playfair.stanford.edu/~wavelab, www.wavelet.org, www.math.spbu.ru/~dmp/ можно получить информацию о программах, статьях, конференциях по теории и приложениям вейвлетов. Последний из перечисленных является сайт Санкт-Петербургского семинара "Всплески и их приложение". Для инженеров, интересующихся приложениями готовых программ по вейвлет-преобразованиям, можно порекомендовать известные математические программные средства, как MATLAB-6.1, Mathematica-4 и Mathcad-2001(Wavelet Extension).

В данной работе мы проведём синтез новых вейвлет-базисов и покажем на примерах их применение для обработки сигналов. Новые они потому, что ни один из приведённых ниже вейвлетов не относится к известным группам которые приводятся в существующей литературе по данной теме. Из широкого класса вейвлетов мы будем конструировать только биортогональные вейвлеты и только те, которые подчиняющиеся свойству кратно-масштабного анализа. Именно это свойство позволяет осуществлять эффективные быстрые алгоритмы разложения и восстановления.

В отличие от синтеза ортогональных вейвлетов [6], синтез не ортогональных вейвлетов имеет гораздо большую свободу как по выбору формы, гладкости, симметрии, так и по таким важным критериям, как локализация и число нулевых моментов, то есть, класс не ортогональных вейвлетов гораздо шире. В этой работе мы подробно опишем алгоритм построения не ортогональных вейвлетов, которые имеют сходства с статистически оптимальным базисом Карунена-Лоева-Обухова [7].

Скейлинговые функции. Биортогональный вейвлет-базис

При разложении сигнала f(x) в не ортогональный вейвлет-базис необходимо иметь два базиса, вейвлет $\Psi(x)$, по которому собственно раскладывается сигнал и двойственный ему вейвлет $\tilde{\Psi}(x)$, с помощью которого определяются кс[...]ния, то есть

$$\phi(x) = \sum_{\varphi\kappa}^{N} \chi_{\varphi\kappa} \Psi_{\varphi\kappa}(\xi),$$

где $\Psi^{*}(\xi) = 2^{-\varphi/2}\psi(2^{-\varphi}\xi - \kappa)$ и $\chi_{\varphi\kappa}$ определяется как:

$$\chi_{\varphi\kappa} = \left\langle \phi, \tilde{\Psi}_{\varphi\kappa} \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\xi)\tilde{\Psi}_{\varphi\kappa}(\xi)\delta\xi,$$

причём выполняется соотношение

$$\left\langle \Psi_{\mu\nu}, \tilde{\Psi}_{\varphi\kappa} \right\rangle = \delta_{\mu,\varphi}, \delta_{\nu,\kappa}, \quad (1)$$

где $\delta_{m,j}$ – символ Кронекера. Вейвлеты Ψ и $\tilde{\Psi}$ называются биортогональными и образуются на основе скейлинговых функций φ и $\tilde{\varphi}$ которые подчиняются двухмасштабным соотношениям (2)

$$\varphi(\xi) = \sum_{\kappa=0}^{N} \pi_{\kappa}\varphi(2\xi - \kappa),$$
$$\tilde{\varphi}(\xi) = \sum_{\kappa=0}^{\tilde{N}} \tilde{\pi}_{\kappa}\tilde{\varphi}(2\xi - \kappa). \quad (3)$$

Верхние индексы суммирования N и $\tilde{N}$ являются носителями функций φ и $\tilde{\varphi}$ соответственно то есть N = suppφ(x), $\tilde{N} = \mathrm{supp}\tilde{\varphi}$. После определения коэффициентов π_{κ} и $\tilde{\pi}_{\kappa}$ из формул (4) можно определить Ψ и $\tilde{\Psi}$ с помощью соотношений

$$\psi(\xi) = \sum_{\kappa=0}^{\tilde{N}} (-1)^{\kappa+1}\tilde{\pi}_{-\kappa+1}\varphi(2\xi - \kappa), \quad (4)$$
$$\tilde{\Psi}(\xi) = \sum_{\kappa=0}^{N} (-1)^{\kappa+1}\pi_{-\kappa+1}\tilde{\varphi}(2\xi - \kappa).$$

Таким образом, чтобы получить вейвлеты Ψ и $\tilde{\Psi}$ необходимо определить коэффициенты π_{κ} и $\tilde{\pi}_{\kappa}$ в разложения (4). Для определения коэффициентов запишем разложения (4) в частотной области

$$\hat{\varphi}(\kappa) = \hat{\varphi}(\kappa/2)\frac{1}{2}\sum_{\kappa=0}^{N} \pi_{\kappa}\exp(-\varphi\kappa\,\kappa/2), \quad (5)$$

$$\hat{\phi}(\kappa) = \hat{\phi}(\kappa/2)\frac{1}{2}\sum_{\kappa=0}^{N} \pi_{\kappa} \exp(-\varphi\kappa\,\kappa/2),$$

где $\hat{\phi}(\kappa) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\exp(-\xi\kappa)\delta\xi$, и введём обозначения для фильтров

$$\mu(\kappa) = \frac{1}{2}\sum_{\kappa=0}^{N} \pi_{\kappa} \exp(-\varphi\kappa\,\kappa/2), \quad (6)$$

$$\tilde{\mu}(\kappa) = \frac{1}{2}\sum_{\kappa=0}^{N} \tilde{\pi}_{\kappa} \exp(-\varphi\kappa\,\kappa/2).$$

Выполнение условия ортогональности (3) для Ψ и $\tilde{\Psi}$, эквивалентно выполнению следующего условия для фильтров [4, 5]:

$$\mu(\kappa)\overline{\tilde{\mu}}(\kappa) + \mu(\kappa+\pi)\overline{\tilde{\mu}}(\kappa+\pi) = 1, \quad (7)$$

здесь черта означает знак комплексного сопряжения.

Если в качестве фильтра выбрать $\mu(\kappa)$, то решая уравнение (8) мы можем найти $\tilde{\mu}(\kappa)$.

Прежде чем объяснить как решается уравнение (8), сделаем некоторое отступление, а затем вернёмся к его решению. (8)

Критерии синтеза вейвлет-базиса

В предыдущем разделе говорилось о том, что при сжатии изображения желательно иметь вейвлеты с большим числом нулевых моментов. Дадим краткое пояснение. ...ся в ряд

$$\phi(\xi) = \sum_{\varphi\kappa}^{N} \chi_{\varphi\kappa} 2^{-\varphi/2}\Psi(2^{-\varphi}\xi - \kappa),$$

если разложить сигнал f(x) в ряд Тейлора в окрестности точки k. то можно получить

$$\phi(\xi) = \phi(\kappa) + \phi'(\kappa)(\xi-\kappa) + \frac{1}{2}\phi''(\xi-\kappa)^2 + \ldots + \frac{1}{\nu!}\phi^{(\nu)}(\xi-\kappa)^{\nu} + \ldots \quad (9)$$

Если мы умножим это выражение на $\tilde{\Psi}(2^{-\varphi}\xi - \kappa)$ и проинтегрируем то, очевидно, в разложении пропадут члены для которых выполняется соотношение

$$\int \tilde{\Psi}(\xi)\xi^{\nu}\delta\xi = 0,\ \nu = 0,1,2\ldots M. \quad (10)$$

В разложении (9) останутся высокочастотные члены при этом подавляются малоинформативные низкочастотные тренды. При сжатии сигнала производится сортировка (значимых) коэффициентов выше некоторого порогового значения. Очевидно, что, чем больше количество нулевых моментов тем лучше сжатие сигнала, то есть тем меньше останется коэффициентов для представления сигнала. В этом смысле симметричный вейвлет-базис близок к оптимальному базису Карунена-Лоева [7]. (11) Сходство проявляется в том, что базис Карунена-Лоева имеет некоррелированные, а вейвлет-базис имеет слабо коррелированные коэффициенты разложения, что является критерием для хорошего сжатия сигнала. Слабая коррелированность вейвлет-базиса объясняется тем, что носители базисных функций (замыкание множеств, на которых функции отличны от нуля) разнесены в пространстве (или во времени). Возвращаясь к уравнению (6), скажем, что оно позволяет синтезировать вейвлеты с любым числом нулевых моментов. Приведём алгоритм синтеза вейвлета с требуемым числом нулевых моментов.

Сконструировать вейвлеты Ψ и $\tilde{\Psi}$ – значит найти $\mu(\kappa)$ и $\tilde{\mu}(\kappa)$. Выбираем $\mu(\kappa)$ в виде

m(k) = $\cos^n(k/2)P(\sin^2(k/2))$,

если n чётное, и в виде

m(k) = $\exp(jk/2)\cos^n(k/2)P(\sin^2(k/2))$,

если n нечётное. В выражении n – степень первого сомножителя $\cos^{\nu}(\frac{1}{2}\kappa)$ определяет число нулевых моментов в конструируемом вейвлете, а P(x) – некий полином. При выбранном выражении для $\mu(\kappa)$ будем искать решение для $\tilde{\mu}(\kappa)$ в виде

$$\tilde{\mu}(\kappa) = \cos^{\sigma}(\kappa/2)\tilde{\Pi}(\sin^2(\kappa/2)) \quad (12)$$

если n чётное, и в виде

$$\tilde{\mu}(\kappa) = \exp(\varphi\kappa/2) \times \cos^{\sigma}(\kappa/2)\tilde{\Pi}(\sin^2(\kappa/2)), \quad (13)$$

если n нечётное.

Введём обозначения

x = $\sin^2(k/2)$, $(1-\xi)^{\sigma/2}\Pi(\kappa) = \tilde{\mu}(\kappa)$,

подставим (12) или (13) и соответственно (14) или (13) в (8), в результате получим уравнение Безу [8]: (14)

... 1,

где $B(\xi) = \Pi(\xi)\tilde{\Pi}(\xi)$, $N = (\sigma+\nu)/2$. Общее решение уравнения

$$B(\xi) = \sum_{\kappa=0}^{N-1} X(N+\kappa-1,\kappa)\xi^{\kappa} + \xi^{N}\phi(\xi - 1/2), \quad (15)$$

где C(N,k) – число сочетаний из n-элементов по k, а f(x) – любая нечётная функция. Первый и второй члены выражения (16), есть частное решение неоднородного уравнения и общее решение однородного уравнения Безу, соответственно. Выбирая различные N и f(x) при выбранном m(κ) в соответствии с (16), получим совершенно определённое выражение для $\tilde{\mu}(\kappa)$. (16) Приведём конкретный пример для чётного и нечётного N. Выбираем N=3 и f(x)=x+ x^3, в этом случае имеем

B(x) = $1+3x+6x^2+x^3(x-1/2+(x-1/2)^3)$. (17)

Определим корни выражения (18) и запишем его в факторизованном виде

$$B(\xi) = A\prod_{\varphi}^{3}(\xi^2 - 2\,\mathrm{Re}(\zeta_{\varphi}) + |\zeta_{\varphi}|^2),$$

где A – константа, которую можно определить, разделив ... на (18); в нашем случае A=1, ζ_{φ}=Re(ζ_{φ})+jIm(ζ_{φ}) – 3 пары комплексно сопряжённых корней: ζ_1 = –0,4763090739 –j1,2303119751, $\zeta_2 = \bar{\zeta}_1$, ζ_3 = –0,2533865279 –j0,30248926..., $\zeta_4 = \bar{\zeta}_3$, ζ_5 = –1,47969571803 – j1,22491119812, $\zeta_6 = \bar{\zeta}_5$. Теперь выбираем (18)

P(x)=(x^2 –2Re(z_2)+$|z_2|^2$), n=5,

m(κ)=exp(jk/2) $\cos^5$(k/2)P($\sin^2$(k/2)),

тогда $\tilde{\Pi}(\xi) = (\xi^2 - 2\,\mathrm{Re}(\zeta_1) + |\zeta_1|^2) \times (\xi^2 - 2\,\mathrm{Re}(\zeta_3) + |\zeta_3|^2)$, $\sigma = 1$, (19)

$$\tilde{\mu}(\kappa) = \exp(\varphi\kappa/2)\cos(\kappa/2)\tilde{\Pi}(\sin^2(\kappa/2)).$$

Раскладываем $\mu(\kappa)$ и $\tilde{\mu}(\kappa)$ в ряды Фурье (7) и

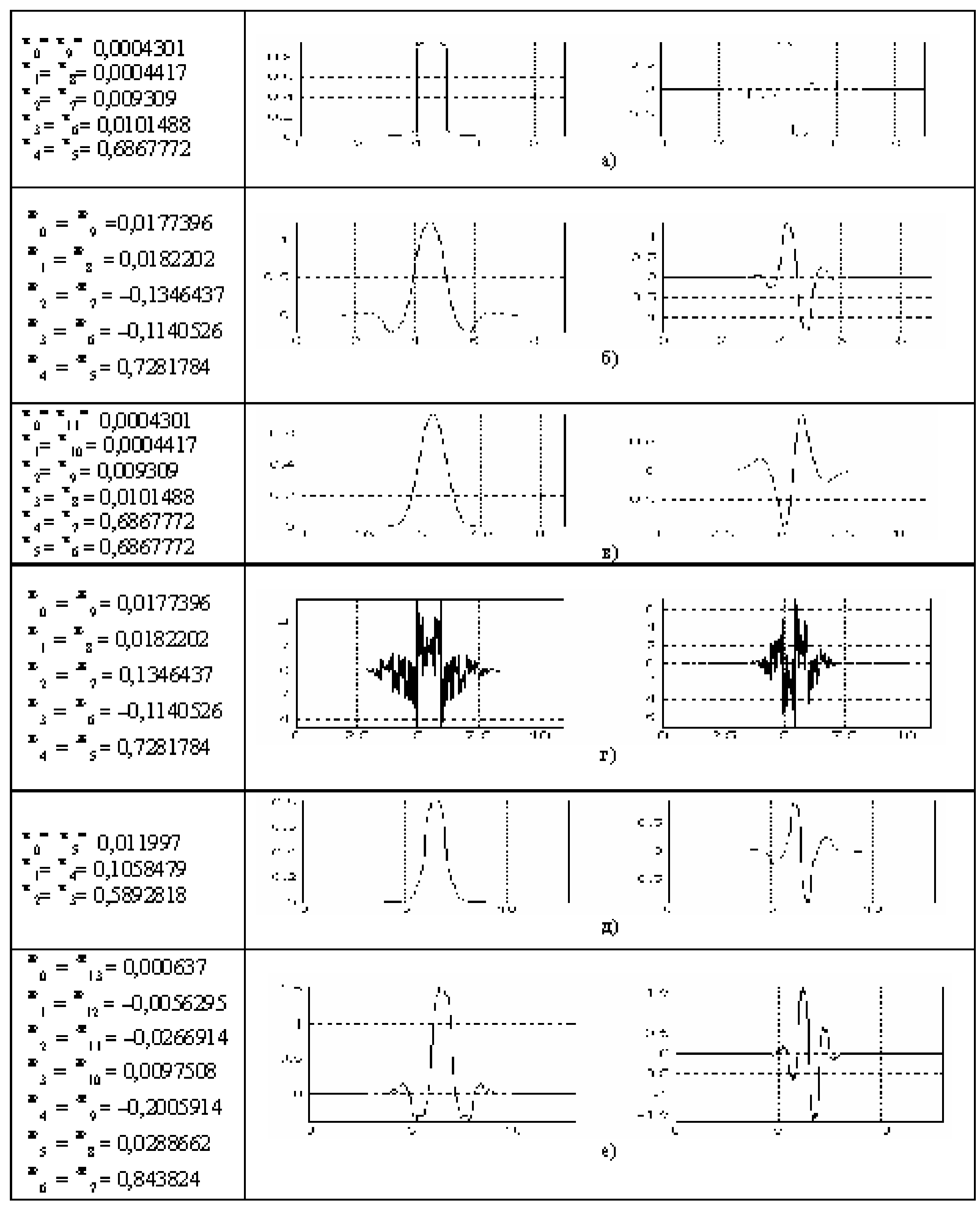


Рис. 1.

получаем по десять коэффициентов π_κ и $\tilde{\pi}_\kappa$ для скейлинговой функции $\varphi(\xi)$ и двойственной ей функции $\tilde{\varphi}$, соответственно (рис. 1, а, б). Разложение в ряд Фурье можно осуществить, используя тригонометрические соотношения (20)

$$\cos^{\nu}(\xi) = \left(\frac{\varepsilon^{\iota\xi} + \varepsilon^{-\iota\xi}}{2}\right)^{\nu}, \quad (21)$$

$$\sin^{\nu}(\xi) = \left(\frac{\varepsilon^{\iota\xi} - \varepsilon^{-\iota\xi}}{2\varphi}\right)^{\nu}, \quad (22)$$

(23)

но гораздо проще разложение Фурье осуществлять в программно интегрируемой среде Mathcad. Далее, следуя алгоритму, описанному в [6], можно построить скейлинговые функции и соответствующие им вейвлеты.

Графические зависимости для вейвлетов Ψ и $\tilde{\Psi}$ и их скейлинговых функций приведены на рис. 1, а, б. Для конструкции следующей пары вейвлетов следует в (19) принять n = 3, а в (21) принять s = 3, при этом в разложениях $\mu(\kappa)$ и $\tilde{\mu}(\kappa)$ в ряд Фурье (7) мы получим 12 коэффициентов π_κ и 10 коэффициентов $\tilde{\pi}_\kappa$ (рис. 1, в, г). Соответствующие этим коэффициентам скейлинговые функции и вейвлеты приведены на рис. 1, в, г. Если принять n=5, s=1 и переместить корень ι из (21) в (19), то получим коэффициенты и соответствующие им вейвлеты и скейлинговые функции, приведённые на рис. 1, д, е.

Остановимся теперь на примере для чётного N = 4. В этом случае решение уравнения Безу будет иметь следующее решение

$$B(x) = 1+4x+10x^2+20x^3+x^4f(x-1/2).$$

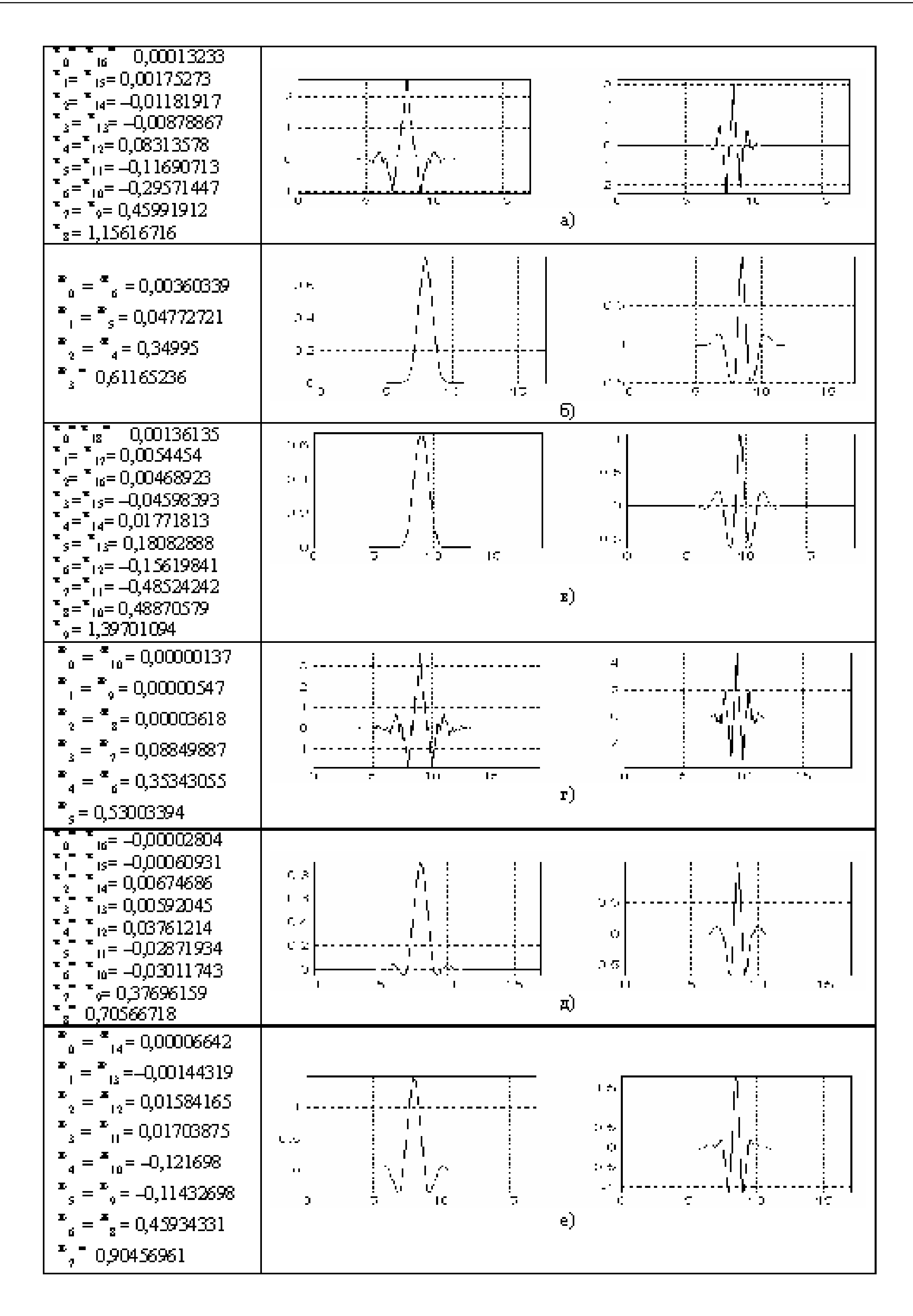


Рис. 2

Выберем в качестве f(x) нечётную функцию f(x)= x+ x³. Находим корни B(x) и записываем в факторизо[ванном виде]

$$B(\xi) = A(\xi - \xi_0)\prod_{\varphi}^{3}(\xi^2 - 2\,\mathrm{Re}(\zeta_\varphi) + |\zeta_\varphi|^2).$$

В этом случае получаем один вещественный корень $x_0 = -0,\ldots89267\ldots$ и 3 пары комплексно сопряжённых корней $\zeta_j = \mathrm{Re}(\zeta_j)+j\mathrm{Im}(z_j)$:

$\zeta_1 = -0,9055499544 - j1,581306455$, $\zeta_4 = \zeta_3$,

$\zeta_2 = -8,1141156107\cdot10^{-2} - j0,372500\ldots$

$\zeta_5 = 1,9056374362 - j1,5814099917$, $\zeta_6 = z_5$.

Теперь можно записать выражение для $\Pi_\mu(\kappa)$ и $\Pi_\mu(\kappa)$ (24)

в виде (12) и (14), соответственно, где $\Pi(\xi)$ и $\Pi(\xi)$ есть различные сочетания сомножителей выражения (25).

Раскладывая в ряды Фурье фильтры $\pi_\mu(\kappa)$ и $\pi_\mu(\kappa)$, получим коэффициенты κ и κ. (25)

Возможные варианты решений приведены на

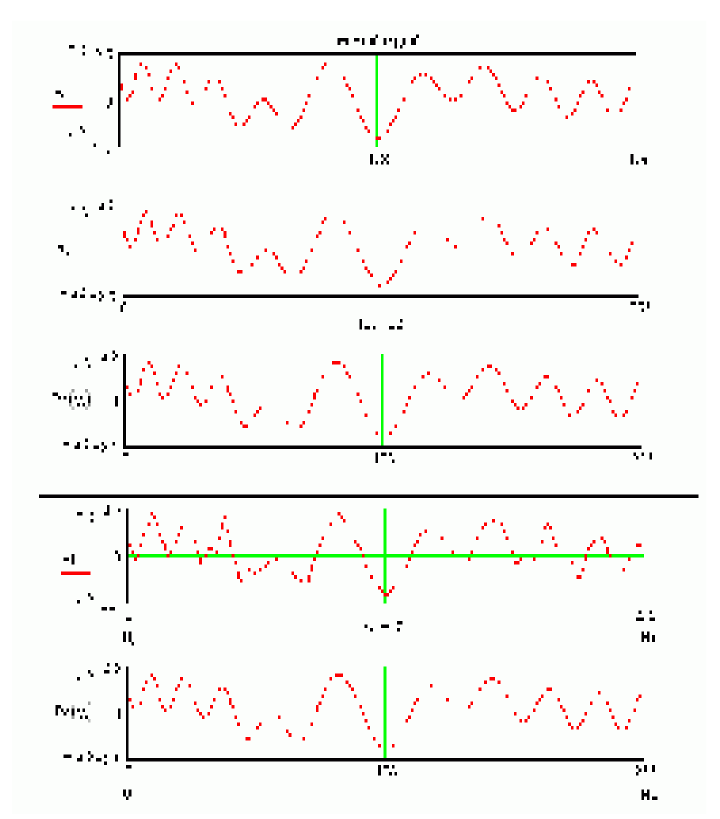


Рис. 3. Разложения сигнала по вейвлетам с разным числом коэффициентов разложения и с разным числом нулевых моментов вейвлетов

рис. 2. Здесь мы привели только некоторые из возможных решений для чётных и нечётных N. Отметим, что при фиксированном N класс возможных решений можно расширить, изменив вид функции f(x), но при этом увеличиваются носители вейвлета и его скейлинговой функции.

Рассмотрим теперь разложение сигналов по полученным базисам. На рис. 3 приведён модельный профиль фазы оптического сигнала (рис. 3, а) и его вейвлет-разложение (рис. 3, б–д). В качестве базиса были выбраны вейвлеты, приведённые на рис. 1, а – число нулевых моментов s = 3, и на рис. 2, д – число нулевых моментов, равное s = 6. На рис. 3, б, в приводится восстановление сигнала с компрессией для вейвлета с s = 6; рис. 3, б – 32 коэффициента из 256 и рис. 3, в – 128 коэффициента из 256. На рис. 3, г, д все то же для вейвлета с s = 3. Как и следовало ожидать, лучшее восстановление и лучшее сжатие сигнала (а, следовательно, и меньшее число коэффициентов в разложении) потребовалось для вейвлета с s = 6 с более высоким числом нулевых моментов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Астафьева Н.М. Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // Успехи физических наук. – 1996. – Т. 166. – № 11. – С. 1145–1170.
2. Новиков И.Я., Стечкин С.Б. Основы теории всплесков // Успехи математических наук. – 1998. – Т. 53. – № 6. – С. 53–128.
3. Дрёмин И.М., Иванов О.В., Нечитайло В.А. Вейвлеты и их использование // Успехи физических наук. – 2001. – Т. 171. – № 5. – С. 465–501.
4. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам / Пер. с англ. Е.В. Мищенко. Под ред. А.П. Петухова. – М.: РХД, 2001.
5. Чуи К. Введение в вейвлеты / Пер. с англ. под. ред. Я.М. Жилейкина. – М.: Мир, 2001. – 372 с.
6. Исаев Ю.Н. Синтез вейвлет-базиса для анализа оптических сигналов. Ч. 1. Ортогональный базис // Оптика атмосферы и океана. – 2002. – Т. 15. –№ 11. – С. 974–981.
7. Исаев Ю.Н., Захарова Е.В. Синтез оптимального базиса для восстановления случайных волновых полей // Оптика атмосферы и океана – 1998 – Т. 11. – № 5. – С. 451–454.
8. DeVore R.A., Jawerth B., Lucier B.J. Image compression through wavelet transform coding // IEEE Transactions on Information Theory. – 1992. – V. 38. – № 2. – P. 719–746.